最適混合戦略におけるジャンケンの意味ある拡張

小松 秀平[1,a)]　小野 廣隆[2,b)]

概要：日本のジャンケンは，石，紙，鋏の３つの手によるものが一般的であるが，世界には４手以上からなるジャンケンが数多く存在する．しかしその中には明らかに他の手と比べ弱く，使うべきでない手（無駄な手）が含まれるジャンケンも多々ある．伊藤らは，無駄な手のない４手以上のジャンケン（一般化ジャンケン）について特徴づけを行った．本研究では，一般化ジャンケンを２人ゼロ和ゲームとして定式化し，最適混合戦略の観点から一般化ジャンケンについて考察を行う．伊藤らの定めた無駄な手のないジャンケンであっても， 戦略的には無駄な手が存在し得ることを示す．

A Game-theoretic Analysis of a Generalized Janken (Rock-Paper-Scissors)

Shuhei Komatsu[1,a)]　Hirotaka Ono[2,b)]

Abstract: Janken, also known as rock-paper-scissors, is a very common hand game, and many variants are played all over the world. In some variants, each of players chooses his/her hand shape not from three shapes (rock, paper and scissors) but from more than three shapes. In such cases, some hand shape could be useless, because it is obviously weaker than some other one. From such a viewpoint, Ito and Nagamochi gave a characterization of a generalized Janken without a useless shape. In this paper, we investigate a generalized Janken from the viewpoint of zero-sum game and its optimal mixed strategy. Interestingly, we find that a type of generalized Jankens without a useless shape proposed by Ito and Nagamochi still has a "useless" shape in terms of the optimal strategy.

1.　はじめに

日本のジャンケンは，石，紙，鋏の３つの手からなり，石は鋏に勝ち，鋏は紙に勝ち，紙は石に勝つ．両者が異なる手を出せば必ず勝負がつき，同じ手を出した場合は引き分けとなる．日本人ならば誰もが知る最もメジャーなゲームの１つであろう．日本だけでなく，世界中にもジャンケンやその類型は存在する．その中には，日本の３手からなるジャンケンと違い， ４手以上からなるものも多々ある．以後， ４手以上であっても，異なる２手の間に必ず勝ち負けが設定されているようなジャンケンの類型のことを単にジャンケンと呼ぶことにする．

[1] 九州大学 経済学部 経済工学科
Department of Economic Engineering, Kyushu University
[2] 九州大学大学院 経済学研究院 経済工学部門
Department of Economic Engineering, Kyushu University
[a)] shuhei@isop.co.jp
[b)] hirotaka@econ.kyushu-u.ac.jp

世界のジャンケンを調べてみると，明らかに他の手と比べて弱く，使うべきでない手が含まれるジャンケンも多くあることがわかる．伊藤らは，他の手の下位互換となっている手を無駄な手と定義し，手数５以上ならば無駄な手のないジャンケン（一般化ジャンケン）を作れることを示した [1].

実際に手数５以上のジャンケンをすることを考えてみよう．手数５以上のジャンケンで，より多く相手に勝つためにはどんな戦略を取るべきだろうか．また，下位互換でなければ本当にすべての手に使う価値があるのだろうか．本研究では，一般化ジャンケンを２人ゼロ和ゲームとして定式化することにより，最適混合戦略の観点から一般化ジャンケンについて考察する．

本論文の構成は以下の通りである．２節で研究の土台となる伊藤らの研究について詳しく紹介する．３節では，一般化ジャンケンを２人ゼロ和ゲームとして定式化し，単純

なジャンケンで取るべき最適混合戦略を求める．４節で，単純なジャンケンを拡張したジャンケンでの最適戦略について考察する．５節では，伊藤らの定義とは異なる，最適戦略の観点から無駄な手を定義していく．最後に６節で本論文のまとめを行う．

2. 準備

本節では，本研究の土台となるジャンケンに関する定義，定理について述べる．本節の記述の多くは伊藤らの [1] に基づいている．

2.1 ジャンケンとトーナメント

ジャンケンは，トーナメントと呼ばれる有向辺からなるグラフを用いて表現できる（図１）．トーナメントの定義は以下の通りである．

定義 1. [1] 有向グラフ $G = (V, E)$（ただし V は頂点集合で $E \subseteq V \times V$ は（有向）辺集号）で自己ループをもたず（すなわち $(x, x) \notin E, \forall x \in V$）、任意の異なる頂点の対 $x, y \in V, x \neq y$ に対して $|\{\{(x, y), (y, x)\} \cap E\}| = 1$ であるもののことをトーナメントと呼ぶ．頂点数 n のトーナメントのことを n-トーナメントと呼ぶこともある．

ジャンケンが存在すれば，それに対応するトーナメントが存在することになり，逆に任意のトーナメントに対して，それに対応するジャンケンが存在する．

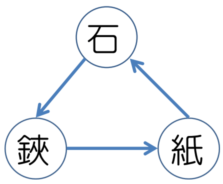

図 1 ３手のジャンケン

2.2 無駄な手

定義 2. [1] トーナメント *G=(V,E)* において，ある２頂点 $x, y \in V$ が存在し，$(x, y) \in E$ であり，かつ，任意の $z \in V - \{x, y\}$ に対して，$(y, z) \in E$ ならば $(x, z) \in E$ であるとき，x は y に優越するといい，y は無駄な手であるという．無駄な手の存在しないトーナメントを効率的であるという．

ここで優越しているとされる手は，別のある手に勝ち，そのある手が勝てるすべての手にも勝つことを表す．つまり，優越しているとされる手が，別のある手の完全な上位互換となっていることを意味し，下位互換となっている手は使うメリットのない無駄な手であるとわかる．

トーナメントが効率的であることはグラフの直径の性質で置き換えることができる．グラフの頂点対 $x, y \in V$ に対し，x から y への距離 $dist(x, y)$ は x を始点，y を終点とする最短路長で定義され，グラフ G の直径は $diam(G) = \max_{x,y \in V)} dist(x, y)$ で与えられる．すると，以下の補題が成立する．

補題 1. [1] トーナメント $G = (V, E)$ について，以下の３条件は同値である．
１．効率的である．
２．直径が２以下である．
３．任意の有向辺 $(x, y) \in E$ に対して、それを含む長さ３の有向閉路が存在する．

2.3 ジャンケンの拡張

以下の手続きにより，任意の効率的なジャンケンから，手数を２つ増やした新たな効率的なジャンケンを作ることが可能である（図２）．

手続き 1. [1] n-トーナメント $G(G = (V, E))$ があったとき，$G^T = (V^T, E^T), V^T = V \cup \{n+1, n+2\}, E^T = E \cup \{(n+1, n+2)\} \cup \{(i, n+1), (n+2, i) \mid i \in E\}$ を満たすように手数 $(n+2)$-トーナメント G^T を作成.

この手続きにより，任意のトーナメント G から手数を２つ増やしたトーナメント G^T を作成でき，G が効率的であったとき，G^T も効率的である．

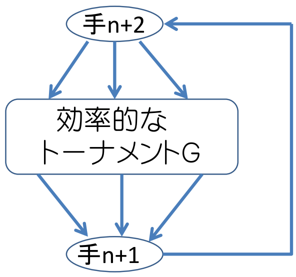

図 2 手続き１

2.4 効率的なジャンケン

手数６程度までなら補題１を考慮することで，しらみつぶしに効率的なジャンケンの形を求めることができる．手数３のときは，日本の一般的なジャンケンの形が効率的であり，この１パターンしかない．補題１を考慮すると，手数４の効率的なジャンケンを作ることはできないとわかる．手数５の効率的なジャンケンは２パターン，手数６の効率的なジャンケンは３パターンある．すると，手数３，６の

ジャンケンを手続き1で拡張していくことにより，手数5以上ならば効率的なジャンケンが存在することがわかる．

定理 1. [1] 自然数 n に対し、効率的な $n-$ トーナメントが存在する必要十分条件は $n \neq 2,4$ である．

3. 単純なジャンケンの最適戦略

3.1 2人ゼロ和ゲームでの定式化

一般化ジャンケンを2人ゼロ和ゲームとして定式化する．これを2人ジャンケンと呼ぶことにする．プレイヤー2人（行プレイヤーと列プレイヤー）による一般化ジャンケンで，勝てば +1，負ければ −1 を得るとし，行プレイヤーから見た利得行列 A（a_{ij} からなる）を用意する．行プレイヤーの取る混合戦略を $\mathbf{x}$，列プレイヤーの取る混合戦略を $\mathbf{y}$ とすると，一般化ジャンケンにおける期待利得の最大化は，行プレイヤーの期待利得を最大にすることを目的とした数理計画問題として以下のように定式化できる．また，これを満たす $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ がそれぞれ行プレイヤー，列プレイヤーの最適混合戦略である．

$$
\begin{aligned}
\max_{x_i} \min_{y_j} \quad & \textstyle\sum_i \sum_j \ a_{ij} x_i y_j \\
s.t. \quad & \textstyle\sum_i \quad x_i = 1 \\
& \textstyle\sum_j \quad y_j = 1 \\
& \mathbf{x} \quad \geq 0, \mathbf{y} \geq 0
\end{aligned}
$$

この定式化では二次項を含むが，最適解 $\mathbf{x}^*$ は, 以下の線形計画問題を解くことにより得られることが知られている [2].

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z \\
s.t. \ & \textstyle\sum_i \ x_i = 1 \\
& \textstyle\sum_i \ a_{ij} x_i - z \geq 0 \\
& \mathbf{x} \ \geq 0
\end{aligned}
$$

以下，本定式化に基づき，一般化ジャンケンの最適戦略を考える．まず本節にて，拡張の元となる奇数手最小のジャンケン，偶数手最小のジャンケンについて調べ，さらにその手数オリジナルの形について考察する．その後，4節にてそれらを元にして拡張したジャンケンについて考えていくことにする．

3.2 手数3のジャンケンの最適戦略

まず，奇数手最小である手数3のジャンケンについて考察する．手数3の2人ジャンケンにおける利得行列は以下の行列 A であらわされる：

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},
$$

節点数3のトーナメントを用いた2人ジャンケンについて，以下の定理が成り立つ．

定理 2. 節点数3のトーナメントを用いた2人ジャンケンにおいて，戦略 $\mathbf{x} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ は，最適戦略であり，この戦略以外の最適戦略は存在しない．

証明. ジャンケンの2人ゼロ和ゲームは，自己双対問題（線形計画問題の双対問題が自身と本質的に同一であるような問題）であるから，最適値は必ず 0 となる [2]．よって，最適戦略を $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, x_3)$ とおくと，制約式は，以下をみたす．

$$
\begin{cases}
-x_2 + x_3 \geq 0, & (1) \\
x_1 - x_3 \geq 0, & (2) \\
-x_1 + x_2 \geq 0, & (3) \\
x_1 + x_2 + x_3 = 1. & (4)
\end{cases}
$$

(1) (2) (3) より，$x_3 \geq x_2 \geq x_1 \geq x_3$ が成立，つまり，$x_1 = x_2 = x_3$ となる．よって, (4) より, $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$ となる．また，この戦略以外に制約をみたす戦略はありえないため，これが唯一の最適戦略となる． □

3.3 手数5，6のジャンケンの最適戦略

次に，手数5のジャンケン, 偶数手最小のジャンケンである手数6のジャンケンについて考える．後でみるように, 手数5のジャンケンの最適戦略は手数6のジャンケンでの戦略と強い関係がある．前述の通り，節点数5の効率的なトーナメントは2パターン存在するため，それぞれのパターンを $P_5[1]$，$P_5[2]$ と呼ぶことにする（図 3，4）．

$P_5[1]$，$P_5[2]$ による2人ジャンケンにおける利得行列はそれぞれ以下の行列 $A_5[1]$，行列 $A_5[2]$ で表される：

$$
A_5[1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
A_5[2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

節点数5のトーナメント $P_5[1], P_5[2]$ を用いた2人ジャンケンについて，以下の定理が成り立つ．

定理 3. 節点数5のトーナメント2パターンのうち, $P_5[1]$ を用いた2人ジャンケンにおいては $\mathbf{x_1} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, $P_5[2]$ を用いた2人ジャンケンにおいては $\mathbf{x_2} = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

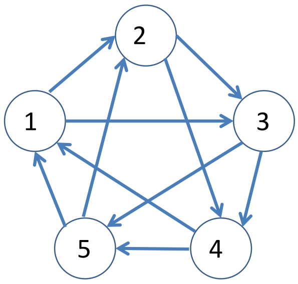

図 3　パターン 1（$P_5[1]$）

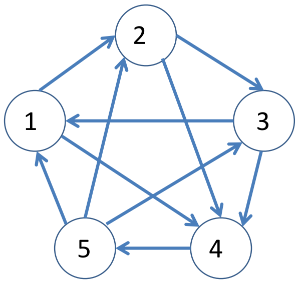

図 4　パターン 2（$P_5[2]$）

が，それぞれの唯一の最適戦略である．

証明． まず $P_5[1]$ について考える．ジャンケンの 2 人ゼロ和ゲームは，自己双対線形計画問題であるから，主問題の最適戦略は双対問題における最適戦略と一致し，最適値は 0 になる [2]． よって，最適戦略を $\mathbf{x}^*{}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ とおくと，以下の制約をみたす．

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \leq 0, & (5) \\ -x_1 + x_3 + x_4 - x_5 \leq 0, & (6) \\ -x_1 - x_2 + x_4 + x_5 \leq 0, & (7) \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_5 \leq 0, & (8) \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leq 0, & (9) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1. & (10) \end{cases}$$

まず (6)+(8) より，$x_4 \leq x_2$ が成立する．一方，(5)+(7)+(9) より，$x_2 \leq x_4$ が成立するため $x_2 = x_4$ となる． これを (5) に代入すると $x_3 \leq x_5$ が成立する．(7)＋(9) より，$x_5 \leq x_3$ が成立するため，$x_3 = x_5$ となる． これを (6) に代入して，$x_4 \leq x_1$ が成立する．一方，(5)＋(8) より，$x_1 \leq x_4$ がするため，$x_1 = x_4$ となる．最後に，(9) より，$x_2 \leq x_3$ が成立する．一方，(6)＋(7) より，$x_3 \leq x_2$ が成立するため，$x_2 = x_3$ となる．以上より，$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ となることがわかる． よって，(10) より，$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{1}{5}$ となるから，最適戦略は，$x^*{}_1 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ となる．

次に $P_5[2]$ について考える．$P_5[1]$ と同様に，制約式のみから最適戦略を求めることが可能である．計算は省略するが，最適戦略を $x^*{}_2$ とおくと，$x^*{}_2 = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ となる．

以上それぞれのパターンに対する最適戦略の導出において，それぞれの戦略以外に制約をみたす戦略はありえないから，それぞれの戦略はそのパターン唯一の最適戦略である． □

次に，手数 6 のジャンケンについて考える．前述の通り，節点数 6 の効率的なトーナメントは 3 パターン存在する．これらを $P_6[1]$，$P_6[2], P_6[3]$ と呼ぶことにする（図 5, 6, 7）．

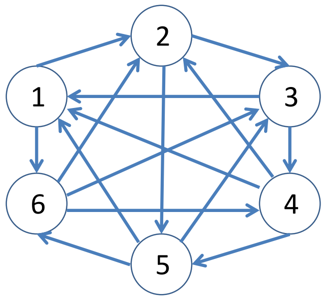

図 5　パターン 1（$P_6[1]$）

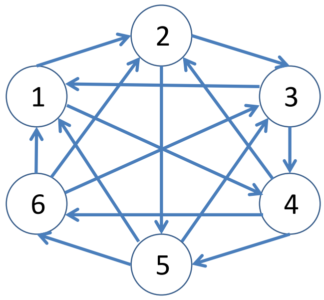

図 6　パターン 2（$P_6[2]$）

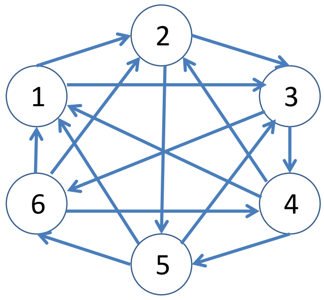

図 7　パターン 3（$P_6[3]$）

$P_6[1]$，$P_6[2], P_6[3]$ による 2 人ジャンケンにおける利得行列はそれぞれ以下の行列 $A_6[1]$，行列 $A_6[2], A_6[3]$ で表される：

$$A_6[1]=\begin{bmatrix}0&1&-1&-1&-1&1\\-1&0&1&-1&1&-1\\1&-1&0&1&-1&-1\\1&1&-1&0&1&-1\\1&-1&1&-1&0&1\\-1&1&1&1&-1&0\end{bmatrix},$$

$$A_6[2]=\begin{bmatrix}0&1&-1&1&-1&-1\\-1&0&1&-1&1&-1\\1&-1&0&1&-1&-1\\-1&1&-1&0&1&1\\1&-1&1&-1&0&1\\1&1&1&-1&-1&0\end{bmatrix},$$

$$A_6[3]=\begin{bmatrix}0&1&1&-1&-1&-1\\-1&0&1&-1&1&-1\\-1&-1&0&1&-1&1\\1&1&-1&0&1&-1\\1&-1&1&-1&0&1\\1&1&-1&1&-1&0\end{bmatrix}.$$

節点数６のトーナメントを用いた２人ジャンケンについて，以下の定理が成り立つ．

定理 4. 節点数６のトーナメント３パターンのうち，$P_6[1]$ を用いた２人ジャンケンにおいては $\mathbf{x_1}=(0,0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，$P_6[2]$ を用いた２人ジャンケンにおいては $\mathbf{x_2}=(0,\frac{1}{9},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{9})$，$P_6[3]$ を用いた２人ジャンケンにおいては $\mathbf{x_3}=(0,\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5})$ が，それぞれの唯一の最適戦略である．

証明. まず $P_6[1]$ について考える．ジャンケンの２人ゼロ和ゲームは，自己双対線形計画問題であるから，主問題の最適戦略は双対問題における最適戦略と一致し，最適値は０になる．よって，最適戦略を $\mathbf{x^*}_1=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ とおくと，以下の制約をみたす．

$$\begin{cases}x_2-x_3-x_4-x_5+x_6\le 0 & (11)\\ -x_1+x_3-x_4+x_5-x_6\le 0 & (12)\\ x_1-x_2+x_4-x_5-x_6\le 0 & (13)\\ x_1+x_2-x_3+x_5-x_6\le 0 & (14)\\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_6\le 0 & (15)\\ -x_1+x_2+x_3+x_4-x_5\le 0 & (16)\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1 & (17)\end{cases}$$

まず, (14)+(15)+(16) より，$x_1+x_2+x_3\le 0$ となる．が，x_1,x_2,x_3 は非負であるため，よって，$x_1=x_2=x_3=0$ が成立する．　このとき, (14), (15), (16) より，$x_4=x_5=x_6$ となる．さらに (17) から，$x_4=x_5=x_6=1/3$ となり，よって，$\mathbf{x^*}_1=(0,0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ となる．なお, $P_6[1]$ において, 手１，２，３を無視すると (確率０), 手数３のジャンケンと同型であり, 戦略的な観点からは $P_6[1]$ は手数３のジャンケンと本質的に変わらないものであることがわかる．

次に $P_6[2]$ について考える．$P_6[1]$ と同様に，制約式を用いて，$x_1=0$, $x_2,x_3,x_4x_5,x_6\neq 0$ となる．$P_6[2]$ において，手１を無視すると $P_5[2]$ と同型のジャンケンとなる．よって，最適戦略を $\mathbf{x^*}_2$ とおくと，$\mathbf{x^*}_2=(0,\frac{1}{9},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{9})$ となる．

最後に $P_6[3]$ について考える．$P_6[1]$ と同様に，制約式を用いて，$x_1=0$, $x_2,x_3,x_4x_5,x_6\neq 0$ となる．$P_6[3]$ において，手１を無視すると $P_5[1]$ と同型のジャンケンとなる．よって，最適戦略を $\mathbf{x^*}_3$ とおくと，$\mathbf{x^*}_3=(0,\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5})$ となる．

また，それぞれのパターンについて，それぞれの戦略以外に制約をみたす戦略はありえないから，それぞれの戦略はそのパターン唯一の最適戦略である． □

以上で，奇数手，偶数手最小のジャンケンで取るべき戦略がわかった．次に，奇数手のジャンケンにおける固有の形について考える．

3.4 すくみの形のジャンケン

４節では，ジャンケンの拡張 (たとえば手続き 1) と最適戦略の関係について考察するが，その前に「拡張」によって作られることがないジャンケンについて考察する．手続き１によって作られる効率的なジャンケンは, ある手数３のジャンケンの１手を効率的な n-トーナメント G に置き換えたものとみなすことができる. 4.2 節で見るように, この手続きは一般化することができ, 効率的なジャンケンはいくらでも生成することができる．

本節では, そのような拡張によっては生成され得ない, その手数で初めて現れる構造からなるジャンケンついて考える．これを，その手数の**固有の形**と呼ぶことにする．手数５ならば $P_5[1]$ が固有の形であり，手数６ならば３つのパターンすべて固有の形であることを示すことができる．

本節では特に奇数手 $2n+1$ 手からなるジャンケンに限定して，固有の形について考える．任意の奇数手 $2n+1$ 手のジャンケンについて，すべての手が n 勝 n 敗する固有の形が必ず存在する．この固有の形をすくみの形として定義する．ここで，$f(x)=r$，ただし，$r=1,2,\cdots,2n+1$，かつ，$x\equiv r \mod 2n+1$ とする．

定義 3. 頂点 $V(V=\{1,2,\cdots,2n+1\})$ があったとき，辺 E について，$i\in V$ に対し，$(i,f(i+1)),(i,f(i+2)),\cdots,(i,f(i+n)),(f(i+n+1),i),(f(i+n+2),i),\cdots,(f(i+2n),i)$ となるトーナメントが存在す

る．このトーナメントと，これに同型のものを**すくみの形**と呼ぶ．

すくみの形が，効率的なジャンケンであることを確認しておく．頂点 $i \in V$ がほかの任意の点に 2 以下の有向路があれば，トーナメントは効率的である（補題 1）．$f(i+1), f(i+2), \cdots, f(i+n)$ までは，i から有向辺がのびていけるので長さ 1 の経路がある．$f(i+n+1), f(i+n+2), \cdots, f(i+2n)$ には，$f(i+n)$ から有向辺がのびているので，i からは長さ 2 の経路がある．よって，すくみの形は効率的なトーナメントである．

すくみの形について以下の定理が成り立つ．

定理 5. 節点数 $2n+1$ のすくみの形の 2 人ジャンケンにおいて，戦略 $\mathbf{x} = (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+1}, \cdots, \frac{1}{2n+1})$ は，最適戦略である．

証明. ジャンケンの 2 人ゼロ和ゲームは，自己双対線形計画問題であるから，主問題の最適戦略は双対問題における最適戦略と一致し，最適値は 0 になる [2]．よって，最適戦略を $\mathbf{x^*}_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_{2n+1})$ とおくと，以下の制約をみたす．

$$
\begin{cases}
x_2 + \cdots + x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{2n+1} \le 0, \\
-x_1 + x_3 + \cdots + x_{n+2} - x_{n+3} - \cdots - x_{2n+1} \le 0, \\
-x_1 - x_2 + x_4 + \cdots + x_{n+3} - x_{n+4} - \cdots - x_{2n+1} \le 0, \\
\quad \vdots \\
-x_1 - \cdots - x_{n+1} + x_{n+2} + x_{2n} \le 0, \\
x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n+1} = 1.
\end{cases}
$$

すべての不等式について，足される変数と引かれる変数の数が一致．よって，$x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n+1}$ のとき，すべての不等式について左辺は 0 となり，不等式の制約はみたす．等式の制約をみたすため，$x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$ となる． □

4. 拡張によるジャンケンの最適戦略

4.1 手続き 1 を用いた拡張によるジャンケン

3 節で最適戦略が求められたジャンケンを元にしてジャンケンを拡張していく．ここではまず，手続き 1 によって作成されたジャンケンについて考える．手続き 1 で作成されたトーナメントを用いた 2 人ジャンケンの最適戦略は，拡張前のジャンケンの最適戦略を用いて表すことができる．なお，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して $\mathbf{y} = (cx_1, cx_2, \cdots, cx_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots)$ であるとき，これを簡潔に $\mathbf{y} = (c\mathbf{x}, y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots)$ などと表すことにする．

定理 6. 節点数 n のトーナメント R を用いた 2 人ジャンケンにおいて $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が最適戦略であるとき，節点数 $n+2$ のトーナメントT（$T := R^T$）において，戦略 $\mathbf{y} = (\frac{1}{3}\mathbf{x}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ が最適戦略である．また，戦略 $\mathbf{x}$ がトーナメント R において唯一の最適戦略であったなら，戦略 $\mathbf{y}$ もトーナメント T において唯一の最適戦略である．

証明. 拡張前のトーナメント R による 2 人ジャンケンの利得行列が行列 A で表されているとし，拡張前のジャンケンでの戦略を $\mathbf{x}$，最適戦略を $\mathbf{x}^*$ とかく．拡張後のトーナメント T による 2 人ジャンケンでの戦略は $\mathbf{y}$，最適戦略は $\mathbf{y}^*$ とする．ジャンケンの 2 人ゼロ和ゲームは自己双対線形計画問題でるから，双対問題における最適戦略は，主問題の最適戦略と一致する [2]．トーナメント R を用いた二人ジャンケンの双対問題は以下となる．

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z \\
s.t. \ & \textstyle\sum_j \ x_j = 1 \\
& A\mathbf{x} \ -z \le 0 \\
& \mathbf{x} \ \ \ge 0
\end{aligned}
$$

自己双対線形計画問題であるため，最適値は 0 [2]． よって，任意の戦略 $\mathbf{x}$ について $z \ge 0$ であるから，以下が成り立つ．

$$
A\mathbf{x} \le \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} \ (r \ge 0) \ .
$$

ここで，拡張されたトーナメントTを用いた 2 人ジャンケンでの戦略について考える．手続きにより加えられた手である手 $n+1$，手 $n+2$ を選択する確率をそれぞれ $y_{n+1}, y_{n+2} (0 \le y_{n+1}, y_{n+2} \le 1, \quad y_{n+1} + y_{n+2} \le 1)$ とし，a を $a = 1 - y_{n+1} - y_{n+2}$ であたえられる実数とする．すると，Tでの任意の戦略 $\mathbf{y}$ は，$\mathbf{y} = (a\mathbf{x}, y_{n+1}, y_{n+2})$ で表すことができる．$\mathbf{y}$ が最適戦略となるとき最適値は 0 となるため，制約式は以下をみたす．

$$
\begin{cases}
aA\mathbf{x} - y_{n+1} + y_{n+2} \le 0, & (18) \\
a - y_{n+2} \le 0, & (19) \\
-a + y_{n+1} \le 0, & (20) \\
a + y_{n+1} + y_{n+2} = 1. & (21)
\end{cases}
$$

すべての行について (18) をみたすため, $ar - y_{n+1} + y_{n+2} \le 0$ が成立する．$a, r \ge 0$ より $ar \ge 0$ だから，$y_{n+2} \le y_{n+1}$ が成立する．一方, (19) + (20) より，$y_{n+1} \le y_{n+2}$ とであるため, $y_{n+1} = y_{n+2}$ となる． これを (19), (20) に代入して, $y_{n+1} = y_{n+2} = a$ となる．(21) より, $y_{n+1} = y_{n+2} = a = \frac{1}{3}$ となるため, これを (18) に代入して, $\frac{1}{3}A\mathbf{x} \le 0$ から, $\frac{1}{3}r \le 0$ である．よって，$r = 0$ となる．以上から, このときの $\mathbf{x}$ は，Rにおける最適戦略 $\mathbf{x}^*$ となり, トーナメントTにおける最適戦略 $\mathbf{y}^*$ は，$\mathbf{y}^* = (\frac{1}{3}\mathbf{x}^*, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ で表される．

また，制約をみたす戦略はこの形しかありえないため，トーナメント R における最適戦略が唯一であったならば，

トーナメント T の最適戦略も唯一となる． □

なお，伊藤らは，手続き１を続けることにより作成されたジャンケンが興奮度という尺度の最大となるジャンケンであることを示した [1]．本定理は，興奮度最大のジャンケンの最適戦略が，１敗しかしない手と１勝しかできない手をそれぞれ $\frac{1}{3}$ ずつ出す形で再帰的に導出できることを示すものである．

4.2 別の拡張によるジャンケン

次に，手続き１とは別の拡張の方法について考える．効率的なジャンケンを組み合わせることにより，新たな効率的なジャンケンを作る．効率的なジャンケンがあったとき，そのうちの手の１つを，別の効率的なジャンケンに置き換える．置き換えられたジャンケンのすべての手は，元あった手が勝っていた手にはすべて勝ち，もとあった手が負けえていた手にはすべて負ける．これにより，新たな効率的なジャンケンが作成できる．

手続き１とは別の拡張と述べたが，手続き１は手数３のジャンケンに任意の無駄のないジャンケンを組み合わせていると考えることもできる．

この拡張による２人ジャンケンの最適戦略について，以下が成り立つ．

定理 7. 節点数 m の効率的なトーナメント R があり，これを用いた２人ジャンケンの最適戦略が $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$，これとは別に節点数 n の効率的なトーナメント S があり，これを用いた２人ジャンケンの最適戦略は $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ であたえられていたとする．ここで，トーナメント R の手 m をトーナメント S におきかえることでトーナメントの拡張を行う．このとき，得られる節点数 $m+n-1$ からなる新たな効率的なトーナメント T に対する２人ジャンケンの最適戦略は，$\mathbf{z} = (x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}, x_m\mathbf{y})$ である．

証明. 節点数 m の効率的なトーナメント R による２人ジャンケンの利得行列が行列 A で表されているとし，戦略を $\mathbf{x}$ とかく．これとは別に節点数 n の効率的なトーナメント S があり，これを用いた２人ジャンケンの戦略は $\mathbf{y}$ とする．トーナメント R の手 m をトーナメント S に置き換えることで，節点数 $m+n-1$ 手のトーナメント T に拡張する．ジャンケンの２人ゼロ和ゲームは自己双対線形計画問題であるから，双対問題における最適戦略は，主問題の最適戦略と一致し，最適値は 0 [2]． よって，まずトーナメント S の任意の戦略 $\mathbf{y}$ について $Z \geq 0$ であるから，以下が成り立つ．

$$A\mathbf{y} \leq \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} \ (r \geq 0) \ .$$

ここで, 拡張されたトーナメント T を用いた２人ジャンケンでの戦略について考える．手１から手 $m-1$ を選択する確率をそれぞれ $z_1, \cdots, z_{m-1}$ とし, a を $a = 1 - z_1 - \cdots - z_{m-1}$ であたえられる実数とする．すると，T での任意の戦略 $\mathbf{z}$ は，$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, a\mathbf{y})$ で表すことができる．$\mathbf{z}$ が最適戦略となるとき最適値は 0 となるため，制約式の１から $m-1$ 番目までの不等式は R に関する不等式の x_m の部分を a に置き換えた形となる．m 番目の不等式に関しては，左辺に $aA\mathbf{y}$ が加えられることになる．よって，$\mathbf{z} = (x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}, x_m\mathbf{y})$ ならば制約をみたすから，これは最適戦略である． □

ここでこの拡張の例を一つあげておく．手数５のジャンケン $P_5[1]$ における手５を，手数３のジャンケンに置き換えることで拡張する（図８）．$P_5[1]$ の最適戦略は，$\mathbf{x} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$，手数３の２人ジャンケンの最適戦略は，$\mathbf{y} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ であった．よって，この７手のジャンケンの最適解は，$\mathbf{z} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15})$ となる．

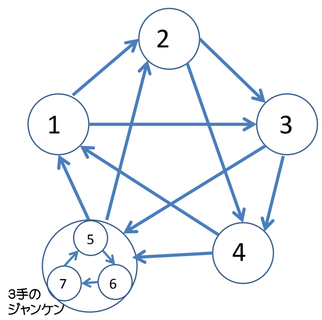

図 8 拡張による７手のジャンケン

5. 戦略的に無駄な手

３節，４節にて，特定の形をした一般化ジャンケンにおける最適戦略を求めることができた．ここで手数６のジャンケンの最適戦略に注目する．手数６の効率的なジャンケンは３パターンあるが，いずれにも戦略的に 0 の確率で出すべき手，つまり出すべきでない手が存在している．しかしこの手は，他の手の直接的な下位互換となっているわけではない．つまり，伊藤らの定義によれば意味のある手であっても，戦略的な観点からは無意味となる手が存在しうることを意味している．以上を踏まえ, 次のように定義する．

定義 4. ２人ジャンケンの任意の最適戦略において確率 0 となる手を**戦略的に無駄な手**と定義する．また，戦略的に無駄な手が存在しないトーナメントを**戦略的に効率的なトーナメント**と呼ぶこととする．

手数と戦略的に無駄な手には以下の関係が成り立つことがわかる．

系 1. 節点数２，４，６のとき，戦略的に効率的なトーナメントは存在しない．

証明. 節点数２，４のときは，戦略的な意味でなくとも効率的なトーナメントが存在しないため明らか．節点数６のときは，定理４より，３つのパターンすべてに最適戦略において０となる手があることがわかるから，戦略的に効率的なトーナメントは存在しない．以上より，節点数２，４，６のとき，戦略的に効率的なトーナメントは存在しない． □

系 2. 節点数 $2n+1$ のとき，戦略的に効率的なトーナメントが存在する．

証明. 定理２より，節点数３のトーナメントは戦略的に効率的である．定理６より，手続き１で拡張すると，拡張前のトーナメントが戦略的に効率的であったなら，拡張後のトーナメントも戦略的に効率的になる．よって，節点数３のトーナメントを手続き１で拡張し続けたトーナメントは戦略的に効率的である．したがって，節点数 $2n+1$ のとき，戦略的に効率的なトーナメントが存在する． □

4 節の結果 (定理 6, 7) から, あるジャンケンに戦略的に無駄な手が存在すれば，そのジャンケンを拡張に用いたジャンケンにも戦略的に無駄な手を含んでしまうことがわかる．4.2 節で述べた拡張を用いても，奇数手のジャンケンの組合せのみで偶数手のジャンケンを作ることはできない．つまり，偶数手のジャンケンは，その手数以下の偶数手のジャンケンを拡張に用いたものか，その手数でのオリジナルの形のものしかない．また，６手のジャンケンには戦略的に無駄な手が存在することが示されている．よって，もしすべての偶数手のオリジナルの形に戦略的な無駄な手が存在しているとすると，偶数手のジャンケンには必ず戦略的に無駄な手が存在することになり，その戦略はその手数以下の奇数手の戦略に帰着する．現時点で, 著者らは以下を予想している．

予想 1. 節点数 $2n$ のとき，戦略的に効率的なトーナメントは存在しない．

6. おわりに

本研究では，伊藤らによる一般化ジャンケンに対して２人ジャンケンにおける最適戦略の観点から考察をおこなった．その結果，効率的なジャンケンであっても，戦略的に出すべきでない手が存在し得ることを明らかにした．戦略的に無駄な手は，線形計画法の定式化が有効ではあるものの万能というわけではない．これは, その定義 (**任意の**最適戦略において, 確率 0 となるような手) から, あるトーナメントにおいて適当な手が戦略的に無駄な手であることを示そうと思っても, 例えば適当な線形計画ソルバーを用いて最適解を求めるなどのアプローチはあまり役に立たないためである (ある手がある最適解において確率 0 であるとしても, それは直ちには任意の最適解において確率 0 であることを意味しない). 今後の課題として, 前節の予想１の証明の他, 「戦略的に無駄な手」がトーナメント上でどのような特徴を持つかの特徴づけ等, 多くの興味深い問題が未解決問題として残されている．

参考文献

[1] 伊藤 大雄, 永持 仁, “ジャンケンのトーナメント表現と意味ある拡張”, 数理解析研究所講究録, 906, pp.14-23, 1995.
[2] Vasek Chvatal, *LINEAR PROGRAMMING* , W. H. FREEMAN and Company, 1983.