視点がブラックホール内部にある場合の 相対論的3次元コンピュータグラフィクス

山下 義行[1,a)]

概要：通常の 3D CG を一般相対論的に拡張し，ブラックホール時空での 3D CG を行う研究が盛んになりつつある．しかしほとんどの研究で用いられるブラックホール時空を記述する Schwarzschild 座標系では，数学的制約から事象の地平面の内側に視点を置くことができない．これに対して，Schwarzschild 座標系から座標変換で得られる Kruskal 座標系には事象の地平面は存在しないことが知られており，事象の地平面の内部に視点を置くことができる．本研究では，まず視点を事象の地平面の外に配置して，Schwarzschild 座標系と Kruskal 座標系のそれぞれを基にした CG 画像を作成する．そして二つの CG 画像が一致することを確認する．これによって本研究の CG 画像の正しさを保証する．次に視点を事象の地平面の内側に配置した CG 画像を Kruskal 座標系に基づいて作成する．これらの CG 画像は計算メッシュを用いた高速描画によってタブレットコンピュータ上でリアルタイムに生成できる．

キーワード：3 次元コンピュータグラフィックス，相対性理論

Relativistic Three Dimensional Computer Graphics with the Viewpoint at the Inside of a Black Hole

Abstract: Researchs on the 3D CG in black hole space-time is becoming active, expanding the conventional 3D CG into the theory of general relativity. However, in the Schwarzschild coordinate that describes the black hole spacetime used in most studies, it is not possible to put a viewpoint inside the event horizon due to the mathematical constraints of the Schwarzschild coordinate. On the other hand, it is known that the Kruskal coordinate obtained by the coordinate transformation from the Schwarzschild coordinate does not have the event horizon so that the viewpoint can be placed inside the event horizon. In this study, we first place the viewpoint outside the event horizon and create CG images based on both of the Schwarzschild and Kruskal coordinates. Then, we confirm that the two CG images are identical. This guarantees the correctness of the CG image in our study. Next, a CG image with the viewpoint inside the event horizon is rendered based on the Kruskal coordinate. These CG images can be generated in real time on a tablet computer by high-speed rendering using a computational mesh.

Keywords: three-dimensional computer graphics, relativity theory

1. はじめに

通常の 3D CG を一般相対論的 [1], [2] に拡張し，ブラックホール時空での 3D CG を行う研究は多い．

簡単のため，ブラックホールを球対称で回転していない最も単純なものに限定しよう．このブラックホール時空を記述する座標系として Schwarzschild 座標系を用いる場合がほとんどである．この座標系は無限遠で平坦な時空に漸近するため，我々の直感的理解と相性がいい．しかし，この座標系によるブラックホールの数学的記述（計量テンソル）には事象の地平面（event horizon）と呼ばれる見かけの特異面が存在し，この面が数値計算の障害になる．よって，この座標系を用いたのでは視点が事象の地平面を通過するような CG アニメーションを作ることができない．

事象の地平面は見かけの特異面であり，事実，Schwarzschild 座標系から座標変換で得られる Kruskal 座標系 [2] による記述には事象の地平面は存在しないことが

[1] 佐賀大学全学教育機構
Organization for General Education, Saga University
[a)] yaman@cc.saga-u.ac.jp

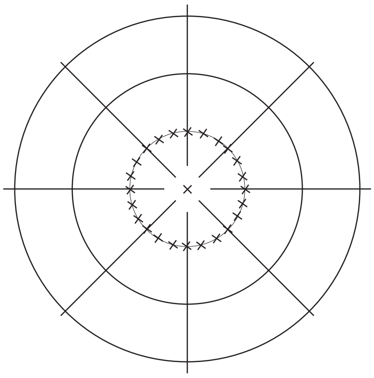


図 1 Schwarzschild 座標系によるブラックホール時空（平面図）：特異点を × 印で表す．中心の × が真の特異点，半径 $r = a$ の円形の × が見かけの特異面である事象の地平面を表す．

知られている．この座標系を用いれば視点が事象の地平面を通過し，ブラックホールに落ち込んでいくような CG アニメーションを作ることができる．しかし，Kruskal 座標系は座標系自体がブラックホールに落ち込んでいくような奇妙な性質を持っており，通常の時空との関連が付けにくく，この座標系を 3D CG に利用する研究はこれまでほとんど知られていない．いくつかの研究は Kruskal 座標系による 3D CG を行なっている [3] が，得られた描画像が何を表しているのか専門家以外には分かりにくいものになっている．

本研究では，まず初めに Schwarzschild 座標系と Kruskal 座標系の両方の座標系を用いて同じシーンを CG 画像化することを行う．単に用いる座標系が異なるだけならば，両者は同じ CG 画像を生成するはずである．よって，もし画像が異なるならば CG プログラムにバグがある．もし画像が一致するならば，完全ではないが部分的には CG プログラムが正しく実装されていることの証明になる．

Kruskal 座標系を用いた CG プログラムが正しいことが証明されたならば，次に視点を事象の地平面に移動させ，ブラックホールに落ち込んでいく視点が見る画像を生成する．本研究では，一般にブラックホールの回りに形成される膠着円盤を被写体として CG 画像を生成する．

なお，ここで紹介する CG 画像は全て Apple 社 iPad Pro で描画した画像である．著者が提案する計算メッシュを用いた高速描画 [4] を行なっているため，非力なマシンでも 100FPS 以上の描画性能を達成できる．

2. ブラックホール時空の座標系

2.1 Schwarzschild 座標系

球対称で回転していない最も単純なブラックホールの 4 次元時空を表現する線素（=時空内の微小距離の定義式）として以下の式が最もよく知られ，用いられている．本稿ではこれを **Schwarzschild 座標系**による表現と呼ぶ．

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \qquad (1)$$

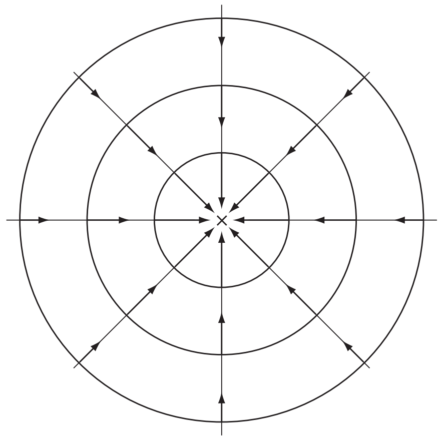


図 2 Kruskal 座標系によるブラックホール時空（平面図）：特異点を × 印で表す．中心の × に真の特異点を表す．事象の地平面は現れない．ただし，この座標系に静止する観測者，被写体は時間と共にブラックホール内部へ落ちていく．

ここに t は時間座標，r は半径座標，θ，ϕ は角度座標であり，$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ である．a は重力半径と呼ばれる定数である．上式は $r \to \infty$ のとき，平坦な時空：

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

に漸近するため，我々の直感的な理解に馴染みやすい．

上の式では $r = 0$ および $r = a$ で計量（右辺の 2 次形式の係数）$(1 - a/r)$ および $(1 - a/r)^{-1}$ が 0 または無限大となる．$r = 0$ はブラックホール中心を表す真の特異点であり，ブラックホール時空からこの特異点を除去することは原理的にできない．それに対して $r = a$ の球面は，次項に示すように座標の選択による見かけの特異面であることが知られている．この球面を**事象の地平面**（event horizon）と呼ぶ．

図 1 にこの座標系での時空を図示する．この座標系を用いる限り，レイトレーシングで光線の軌跡を計算しても，事象の地平面が障壁となって軌跡を重力半径の外部から内部へ，あるいは内部から外部へ光線を追跡することはできない．

2.2 Kruskal 座標系

式 (1) のブラックホール時空は座標変換：$(t, r) \to (T, R)$ によって以下のように表現できることが知られている．本稿ではこれを **Kruskal 座標系**による表現と呼ぶ．

$$ds^2 = \frac{4a^3}{r} e^{-r/a} (dT^2 - dR^2) - r^2 d\Omega^2 \qquad (2)$$

ここに T，R はそれぞれ Kruskal 座標系の時間座標，半径座標であり，Schwarzschild 座標系とは以下の関係にある．

$$T^2 - R^2 = (1 - \frac{r}{a}) e^{r/a} \qquad (3)$$

あるいはランベルトの W 関数[*1]を用いれば以下のように

[*1] $w = W(x)$ は $x = w \cdot e^w$ の逆関数である．

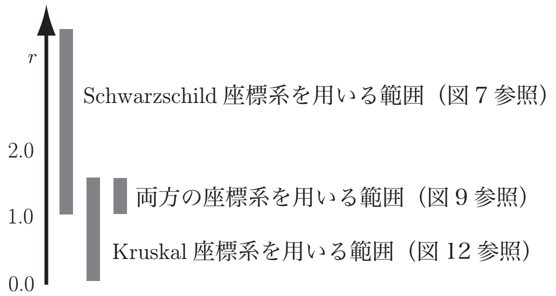


図 3　二つの座標系の適用可能範囲

変形できる．

$$\frac{r}{a} = W\left(\frac{R^2 - T^2}{e}\right) + 1 \tag{4}$$

式 (2) では，$r = 0$ は依然として特異点であるが，$r = a$ はもはや特異点ではないことを注意する．この座標系には事象の地平面は存在しない．よって 3D CG プログラムは光線の軌跡を重力半径の外部から内部へ，あるいは内部から外部へ追跡することができる．

Kruskal 座標系はブラックホールに落ち込んでいく座標系である．何故ならば，式 (4) の右辺の $R^2 - T^2$ の値は半径座標値 R が一定ならば時間座標値 T の増加と共に減少する．ランベルトの W 関数は単調増加関数であるから，式 (4) の左辺 r/a は時間 T と共に減少する，つまりブラックホールに落ち込んでいく．ランベルトの W 関数の定義域は $[-1/e, \infty]$ であるから，$R^2 - T^2 = -1$ となった時点がブラックホールの真の特異点に到達した時刻である．**図 2** はそれを図示したものである．

これらの事実から，ブラックホール内部に視点を置く 3D CG 画像を作るには Kruskal 座標系と共にブラックホールに落ち込んで行けばよい．

3.　研究遂行へのシナリオ

この研究では Kruskal 座標系を用いてブラックホール内部に視点を置く 3D CG 画像を作成する．しかし，Kruskal 座標系は我々の直感から乖離した座標系であるから，

- 作成された CG 画像は正しいものなのか

という点について検証する手段を準備しておくべきである．本研究では，前節の二つの座標系，Schwarzschild 座標系と Kruskal 座標系を用いてそれぞれ作成した 3D CG 画像が一致することを持ってその検証とする．これは完全な検証にはならないが，たとえば巨大桁数の円周率の計算の検証に異なる二つのアルゴリズムを用いることと同様の手法である．

詳細には以下のように行う（**図 3** 参照）．

まず，Schwarzschild 座標系は $r > a$ の範囲を表現しているが，著者の既存の Schwarzschild 座標系を用いた CG プログラム [4] では $r \in [1.01a, 500a]$ の範囲をカバーしている．

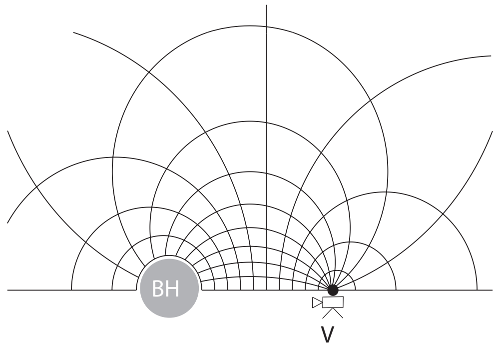


図 4　Schwarzschild 座標系の上の計算メッシュ

次に，Kruskal 座標系は $r > 0$ をカバーしているが，実際には r が大きい場合には計算値がアンダーフロー/オーバーフローするため，利用できない．たとえば式 (2) の右辺に現れる $e^{-r/a}$ の値は $r = 100a$ のときに 3.7×10^{-44} となる．これは通常の GPU で取り扱うことのできる単精度浮動小数点数ではアンダーフローする．仮にアンダーフロー/オーバーフローしないとしても Kruskal 座標系では数値誤差に細心の注意が必要である．本研究では新たに Kruskal 座標系を用いた CG プログラムを開発するのだが，r の範囲を $[0.2592a, 1.2784a]$ とする[*2]．

そして，二つの座標系が共通にカバーする範囲 $r \in [1.01a, 1.2784a]$ でそれぞれ CG 画像を作成し，比較を行う．

二つの CG 画像は一致したならば，Kruskal 座標系を用いた CG プログラムが正しいものと想定し，$r < a$ の範囲で CG 画像作成を行う．

なお，図 3 に示すように，本稿では Schwarzschild 座標系でのみ描画した CG 画像を後に**図 7** に示す．二つの座標系で描画した画像を後に**図 9** に示す．そして，Kruskal 座標系でのみ描画した画像を後に**図 12** に示す．

4.　ブラックホール時空での 3D CG

著者は 10 年前からは GPU を用いたブラックホール CG の高速描画を研究している [4]．この節では本研究にも適用する技法について述べる．

4.1　計算メッシュによる高速化

光線追跡法を曲がった 4 次元時空に拡張し，ブラックホールによる光線の湾曲を CG 画像作成時に数値計算する方法は長大な計算時間を必要とする．そこで，著者はあらかじめ多数の光線の軌跡を計算し，それを GPU に 3 次元テクスチャデータとして保存しておき，描画時には線形補間して利用する方法を提案した．Schwarzschild 座標系の場合，**図 4** のようなメッシュの形状を想定し，線形補間の誤差を最小化すれば人の目にはほとんど気づかれない程度

[*2] $r \simeq 0.2592a$ は Kruskal 座標系では $R = 0.02$，$T = 0.98$ の場合に相当し，$r \simeq 1.2784a$ は $R = 1.0$，$T = 0.0$ の場合に相当する．今回作成した CG プログラムでは r の値ではなく，R と T の値で利用可能範囲を決定した．

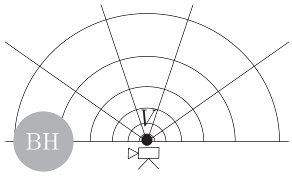


図 5　Kruskal 座標系の上の計算メッシュ

まで描画時の誤差を抑えることができる．これによって，ブラックホール CG の描画時間は劇的に減少する．

本研究では同様の手法を Kruskal 座標系を用いるブラックホール CG にも用いる．Kruskal 座標系の場合，事象の地平面が存在しないため，図 4 のような事象の地平面に沿った形状のメッシュは必要とされず，**図 5** のように，視点の回りに単純にメッシュを張るだけで十分な計算精度を達成できると考えられる．今回はこの方法で事前準備を行なった．

4.2　視点の高速運動

相対論によれば，光速に近い速度で視点が動く場合，光行差（光線が観測者に入射する角度が変化する現象），光のドップラー効果（高速運動によって光線の波長が変化する現象）が現れる．詳細を述べる余裕はないが，これを実装するには座標系に静止する視点での描画処理にローレンツ変換を加えればよい．

2.2 項で述べたように Kruskal 座標系は座標系自体がブラックホールに落ち込む座標系であるから，Schwarzschild 座標系と同等の条件での CG 描画を実現するには，Kruskal 座標系上を視点が高速運動することが避けられない．

逆に視点がブラックホールに落ち込むときの CG 画像（ただし $r > a$）を Schwarzschild 座標系で描画する場合には，Schwarzschild 座標系上での視点の高速運動を取り扱う必要がある．

4.3　被写体の高速運動

被写体が高速運動する場合を取り扱うことは，前項の視点の高速運動同様に，本研究では必須の技術課題である．

著者は，Schwarzschild 座標系の上で被写体が高速運動する場合の取り扱い方法を提案した [5]．詳細は述べないが，今回をこれと同等の手法を Kruskal 座標系にも適用する．

5.　視点がブラックホール外部にある場合の描画例

3 節で述べたように，$r \in [1.01a, 1.2784a]$ のときの，二つの座標系での CG 描画の比較を行い，画像の正しさを検証するのが本研究の第一の目的である．しかし，その画像だけではそこに描画されている被写体の内容が分かりにくい．そこでまず，ブラックホールを遠目から観測する場合の CG 画像を示し，徐々にブラックホールに近づき，最後に $r \in [1.01a, 1.2784a]$ の範囲の CG 画像へ進んでいく．

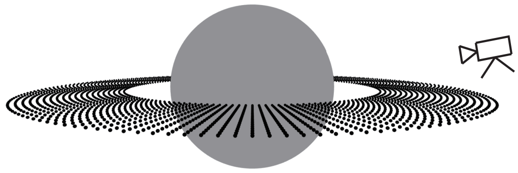
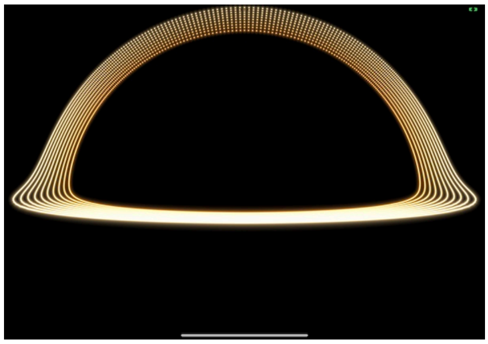
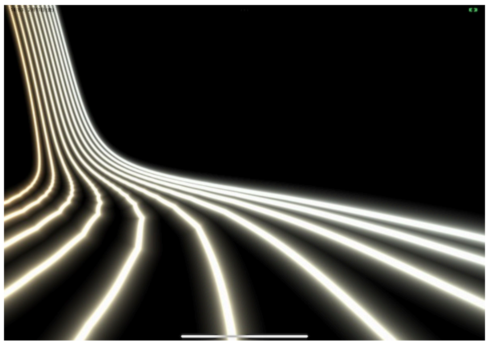


図 6　ブラックホール，視点，被写体の配置（その 1）：ブラックホールの回りの水平面に膠着円盤を環状の点列で表現し，ブラックホールの外側，水平面の少し上からブラックホール方向を撮影する



(a) $r = 6a$ の位置から正面にブラックホールを見た場合



(b) $r = 2a$ の位置（膠着円盤の真上）からブラックホールを真左に見た場合

図 7　Schwarzschild 座標系（式 (1)）を用いて，図 6 での描画像例

簡単のため，本研究では被写体として，点オブジェクト，CG でいうポイントスプライト（point sprite）を用いる．ブラックホールの周りには公転しながらブラックホールに落下する物体が円盤を形成していると考えられており，**膠着円盤**（accretion disk）と呼ばれている．本研究ではそれを 36,000 個の点列で表すこととする．**図 6** がそれを図示したものである．円盤の最内部の半径は $r = 1.5a$，最外部の半径は $r = 2.5a$ とし，10 本の環状の点列を用いる．なお，簡単のため，膠着円盤は公転はせず，Schwarzschild 座標系に静止しているものとする．各点は 5000° の黒体輻射の色温度を持つものとする．よって点の色はほぼ白である．

5.1　視点が膠着円盤の外側にある場合の CG 描画

まず，Schwarzschild 座標系を用いた描画を行う．

図 7 (a) は，視点をブラックホールから $r = 6a$，北緯 5°

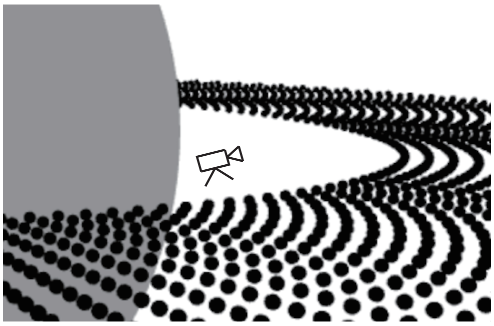


図 8　ブラックホール，視点，被写体の配置（その 2）：ブラックホールの直近，膠着円盤の内側から膠着円盤方向を撮影する

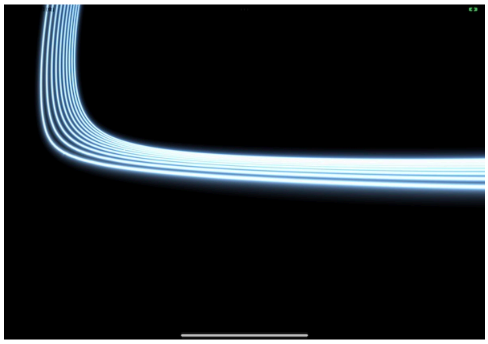
の位置に静止させ，ブラックホール方向を見た場合の CG 画像である．この論文の全ての CG 画像の水平視野角は 60° に設定している．簡単のため，ここではブラックホールの回りを 180° 以上，周回しない光線（[4] でいう primary ray）のみを取り扱う．ブラックホールの場合，180° 以上，周回する光線（[4] でいう secondary ray）が虚像を作り，これがブラックホールの天文観測では重力レンズ効果の証拠として重要だが，今回は省略する．ブラックホールを挟んで視点の反対側の点列が盛り上がって見えるのは，ブラックホールの強い重力による光線の湾曲のせいである．各点が赤く見えるのは，被写体と視点の位置の重力ポテンシャルの差による光の波長の変化，赤方偏移に因る．

次に，図 7 (b) は視点をブラックホールに近づけ $r = 2a$ の距離，北緯 5° の位置に静止させ，円盤のほぼ真上から周回方向を見た場合の膠着円盤の CG 画像である．このとき，ブラックホールは視点の真左に位置する．点列が白いのは，被写体と視点がブラックホールからほぼ同じ距離に位置し，両者に重力ポテンシャルの差がほとんど無いためである．点列が滑らかにつながっていないのは，計算メッシュによる線形補間の誤差が原因であり，これは今後の課題である．

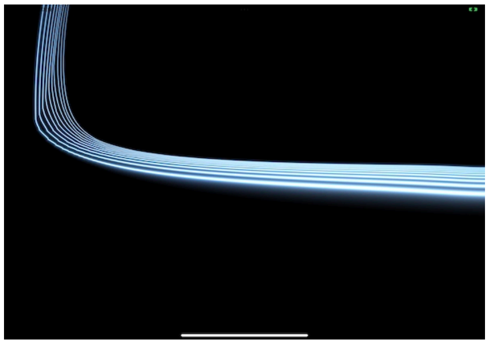
5.2　視点が膠着円盤の内側にある場合の CG 描画

次に，視点を Schwarzschild 座標系および Kruskal 座標系の両方がカバーする位置へ移動させる（図 3 参照）．**図 8** は，視点，ブラックホール，膠着円盤の位置関係を図示したものである．

この位置関係の下，描画された CG 画像が図 9 である．(a)，(b) の画像はそれぞれ Schwarzschild 座標系および Kruskal 座標系を用いて実装された CG プログラムによる描画像である．視点をブラックホールから $r \simeq 1.1293a$，北緯 5° の位置に静止させ，ブラックホールが視点の正面方向から斜め左後ろ 150° の方向に見る場合の CG 画像である．画像左側の点列が上に伸びているのは，図 7 (b) の画像からの類推で，光線の湾曲によるものと理解できる．点列が青いのは重力ポテンシャルの差による波長の青方偏移に因る．



(a) Schwarzschild 座標系（式 (1)）を用いて描画した場合



(b) Kruskal 座標系（式 (2)）を用いて描画した場合

図 9　図 8 での描画像例：$r \simeq 1.1293a$（$R = 0.7$，$T = 0.3$），視点は Schwarzschild 座標系に静止，ブラックホールは視点方向から左後ろ 150° 方向にある．

図 9 で重要なのは，異なる座標系に基づく CG プログラムでの描画像がほぼ一致していることである．3 節で述べたように，これは CG 画像の正しさを証明しているものと考えられる．ただし，図 9 の二つの画像は完全に一致しているわけではなく，以下の二点で異なる．これらは今後の課題である．

(1) 図 9 (a)，(b) の画像を見てすぐに気づくが，点（ポイントスプライト）の大きさが異なる．プログラム中ででにはポイントスプライトの大きさは，点の深さ値に基づいて近い点ほど大きく，遠い点ほど小さく描画するように処理しているが，現時点では深さ値は座標系依存の数値としているため，差異が生じる．

(2) 画像では分かりにくいが，点の描画位置が両画像で数%程度ずれている．この理由は二つ考えられる．ひとつは，両座標系の CG シーンを完全に同じ条件に揃えきれていない可能性がある．もうひとつは，高速化のための計算メッシュの設定で誤差が生じている．

6.　視点がブラックホール内部にある場合の描画例

前節では Kruskal 座標系を用いた CG プログラムが Schwarzschild 座標系を用いた CG プログラムと同等の画像を生成できること，つまり両座標系を用いる CG プログラムの正しさを確認した．この節では視点をブラックホールの内部へ入れる．この場合，Kruskal 座標系を用い

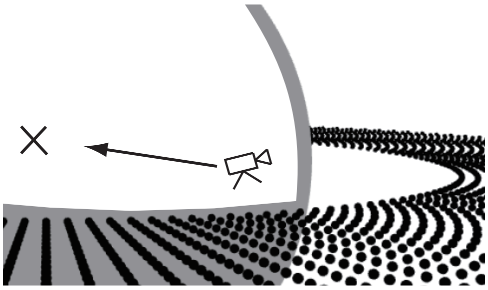


図 10　ブラックホール，視点，被写体の配置（その 3）：視点はブラックホールの内部にあってブラックホール中心に向かって落ちていく

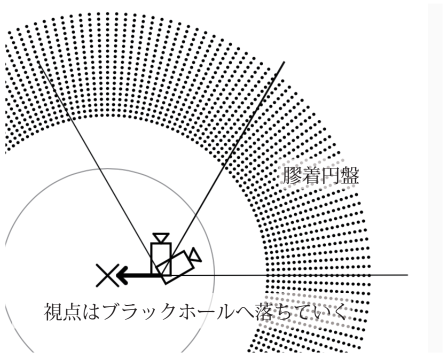


図 11　2 台のカメラが同時撮影しながらブラックホールへ落ちていく

た CG プログラムのみが利用できる．

図 10 は，この節での視点，ブラックホール，膠着円盤の位置関係である．以下の二点を除いて前節までと同様である．

(1) 視点がブラックホール内部（$r < a$）へ入る．

(2) ブラックホール内部で視点を Schwarzschild 座標系に固定するには Kruskal 座標系の上で光速以上の速度で運動する必要がある．が，相対論ではこれは原理的にできない．そこで，ここでは視点を Kruskal 座標系に固定し，座標系と一緒にブラックホールに落ちていくこととする．

図 12 は，視点がブラックホール外部から内部へ落ちていく様子を CG 描画したものである．(a) から (e) の画像は，それぞれ 2 枚で一組になっている．各 CG 画像の水平視野角は 60° であるから，2 枚で 120° の水平視野角をカバーする（**図 11** 参照）．以下，図 12 (a) から (e) について述べる．

(a)　ブラックホール外部の $r \simeq 1.1293a(R = 0.7, T = 0.3)$ において，視点，被写体が Schwarzschild 座標系に静止している場合（ただし計算は Kruskal 座標系を用いて行う）の画像である．図 9 (b) と同じ条件化での描画であり，2 枚の内の右側の画像は図 9 (b) と同一である．Schwarzschild 座標系に静止することは、この場合、Kruskal 座標系の上では R の正の方向へ光速の約 0.4 倍の速度でブラックホールから離脱している場合に相当する．

(b)　上記 (a) とほとんど同じ条件だが，この画像では視点は Kruskal 座標系の上の静止している．よって Schwarzschild 座標系の上から見れば，光速の約 0.4 倍の速度でブラックホールに落ちていく状態である．膠着円盤の描画像の盛り上がっている位置が左側に移動しているのは，光行差に因る．光行差では描画像は視点の進行方向へずれて観測される。

(c)　事象の地平面を通過する瞬間である．Kruskal 座標系を用いているため，問題なく CG 画像を作ることができる．

(d)　視点が事象の地平面の内部の，Schwarzschild 座標系で言えば $r \simeq 0.8246a$ を通過するときの画像である．$r \simeq 0.8246a$ は，Kruskal 座標系では $R = 0.7$, $T = 0.3$ に相当する．時間座標値 T にわざわざ非ゼロ値を用いているのは，本研究の計算メッシュの構築が容易になるためである．詳細は本項では割愛する．別途，報告する予定である．

(e)　視点がさらに内部の，Schwarzschild 座標系で言えば $r \simeq 0.5283a$ を通過するときの画像である．画像右側の円盤部分が赤く見えるのは，波長の赤方偏移による．重力ポテンシャルの観点では外部から内部へ到達する光はエネルギーが増えるため，(a) の画像のように青方偏移するが，視点がブラックホールに高速に落ち込むことによる光のドップラー効果がそれに勝るため，赤方偏移が起きている．光行差もより顕著になっている．

事象の地平面を通過してブラックホールに落ち込んでいくからと言って，CG 画像では特に目新しい現象は観察されない．しかし，著者の知る限り、膠着円盤のような現実的な被写体を用いて CG 画像を生成した相対論的 CG の研究はこれまでほとんど知られていない．

7.　おわりに

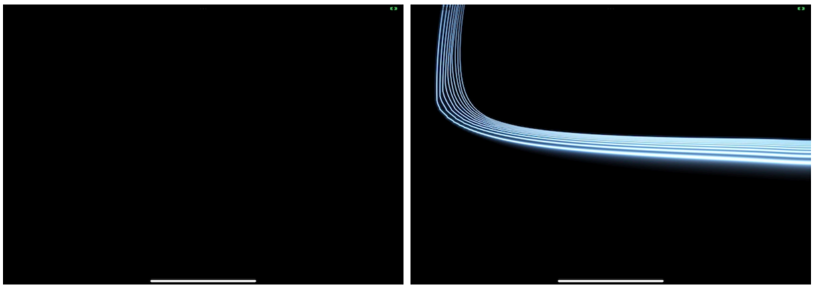
事象の地平面を通過してブラックホールに落ち込む CG 画像を作った．既存の研究との違いは，Kruskal 座標系を用いたこと，さらに Kruskal 座標系を高速運動する視点、被写体を取り扱ったことである．それによって、単に Kruskal 座標系を用いて CG を作っただけではなく、Schwarzschild 座標系との関係について論じることができるようになった．

1 節で触れたように，ここで紹介した画像は全てタブレットコンピュータで作成されており，特別に高性能な GPU や PC は必要ではない．

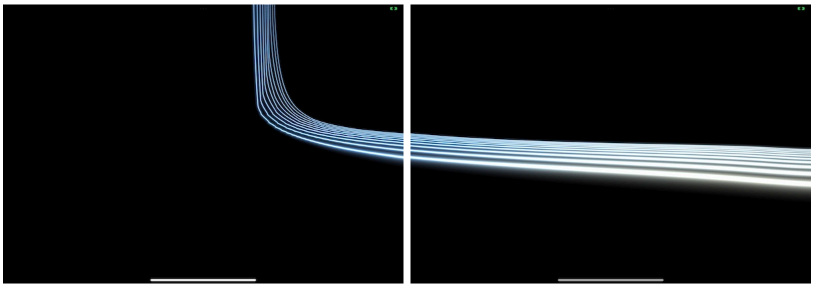
今後は以下を行う予定である．

(1) 計算メッシュの最適化を行い，線形補間の精度を高める．

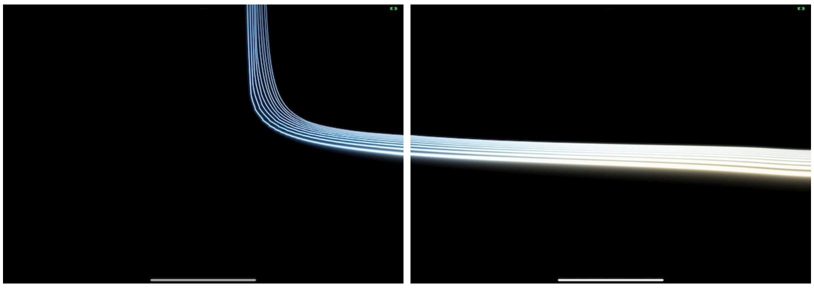
(2) 被写体にポイントスプライトだけではなく，ポリゴンを導入する．



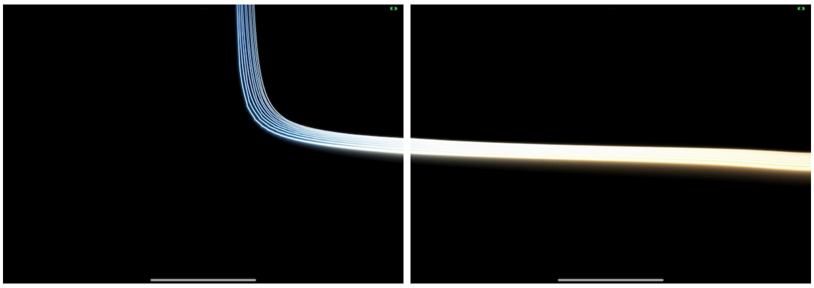
(a) $r \simeq 1.1293a$（$R = 0.7$，$T = 0.3$)，図 9 (b) と同じ条件化での描画．右画像は図 9 (b) と同じ．



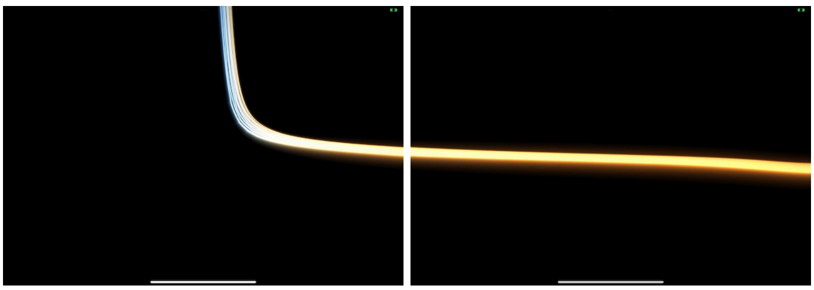
(b) $r \simeq 1.1293a$（$R = 0.7$，$T = 0.3$)，図 9 (b) と同じ条件．ただし，視点は Kruskal 座標系に固定され，ブラックホールに落ちていく



(c) $r = a$（$R = 0.5$，$T = 0.5$)，視点が Kruskal 座標系に固定されたまま，事象の地平面の位置（$r = a$）を通過する場合



(d) $r \simeq 0.8246a$（$R = 0.3$，$T = 0.7$)，視点が Kruskal 座標系に固定されたまま，ブラックホールの内部を落ちていく場合



(e) $r \simeq 0.5283a$（$R = 0.1$，$T = 0.9$)，視点が Kruskal 座標系に固定されたまま，ブラックホールの内部を落ちていく場合

図 12　図 8 から図 10 への時系列のワイド画像例：横並びの 2 枚の画像で水平画角 120 度をカバーする（図 11 を参照)．全て Kruskal 座標系（式 (2)）を用いて描画

(3) より複雑なシーンの CG アニメーションを作成する．可能ならば，タブレットコンピュータで動くゲーム要素を持ったアプリケーションを開発する．

参考文献

[1] J.L. Synge. *Relativity: the General Theory*. North-Holland Pub. Co.; Interscience Publishers, Amsterdam; New York, 1960.
[2] Wolfgang Rindler. *Relativity: SPECIAL, GENERAL, AND COSMOLOGICAL*. Oxford University Press, 2006.
[3] A. J. S. Hamilton. Inside black holes, http://jila.colorado.edu/ ajsh/insidebh/.
[4] Yoshiyuki Yamashita. Implementing a rasterization framework for a black hole space-time. *Journal of Information Processing*, Vol. 24, No. 4, pp. 1–10, July 2016.
[5] 山下義行. ブラックホール時空のリアルタイムコンピュータグラフィックス：亜光速運動する視点と被写体の描画, 電気・情報関係学会九州支部第 70 回連合大会 CD-ROM. 2017.