# スプリットグラフに対する最大 2-クリーク問題の近似可能性

中村 駿太[1,a)]　朝廣 雄一[1,b)]　宮野 英次[2,c)]

**概要**：グラフ $G$ の部分グラフ $G'$ が 2-クリークであるとは，$G'$ 中の任意の 2 頂点間の $G$ における距離が 2 以下であることを言う．入力グラフから最大の 2-クリークを発見する問題について考える．一般の $n$ 頂点グラフに対しては，多項式時間 $O(n^{1/2})$-近似アルゴリズムが存在する．また，スプリットグラフに対しては，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ の仮定のもとで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して多項式時間 $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しないことも知られているが，$O(n^{1/2})$ よりも良い近似度を持つ多項式時間アルゴリズムは知られていなかった．本稿では，スプリットグラフ中の最大 2-クリークを発見する多項式時間 $O(n^{1/3})$-近似アルゴリズムを設計できることを示す．

**キーワード**：グラフアルゴリズム，近似アルゴリズム，グラフクラス

# Approximability of Max 2-Clique Problem for Split Graphs

Shunta Nakamura[1,a)]　Yuichi Asahiro[1,b)]　Eiji Miyano[2,c)]

***Abstract:*** A subgraph $G'$ of a graph $G$ is a 2-clique if, for any pair of two vertices in $G'$, the distance between them in $G$ is at most 2. We consider the problem of finding the maximum 2-clique in a given graph. For general graphs of $n$ vertices, there exists a polynomial-time $O(n^{1/2})$-approximation algorithm. For split graphs, there are no polynomial-time $O(n^{1/3-\varepsilon})$-approximation algorithms for any $\varepsilon > 0$ under the assumption $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$. However, it has been open whether there is a polynomial-time algorithm with an approximation ratio better than $O(n^{1/2})$ for split graphs. In this paper, we show that a polynomial-time $O(n^{1/3})$-approximation algorithm can be designed for split graphs.

***Keywords:*** graph algorithm, approximation algorithm, graph class

## 1. はじめに

### 1.1 研究背景

入力として与えられる単純無向連結グラフ $G = (V, E)$ の点誘導部分グラフ（以下，単に部分グラフと呼ぶ）が完全グラフであるとき，その部分グラフを**クリーク**と呼ぶ．ここで，完全グラフとは，任意の 2 頂点間に辺が存在するグラフのことである．グラフ $G$ 中の頂点数が最大となるクリークを発見する問題を**最大クリーク問題**と呼ぶ．頂点数が $k$ 以上のクリークがあるかどうかを問う決定問題を考えると，この決定問題は $\mathcal{NP}$ 完全であることが知られている [1]．最大クリーク問題は，この決定問題と同等かそれ以上に難しい問題であるため，最大クリーク問題は $\mathcal{NP}$ 困難である．定義は後述するが，最大クリーク問題を一般化した問題である**最大 $d$-クリーク問題**と**最大 $d$-クラブ問題**は，$d = 1$ のとき，最大クリーク問題と同一の問題である．そのため，いずれの問題も $\mathcal{NP}$ 困難である．

多項式時間で厳密解が得られれば嬉しいがそれが困難な場合，実用面においては，多項式時間で良い近似解が得られるのであればそれでも十分な場合がある．そのため $\mathcal{NP}$ 困難な問題に対して，多項式時間で動作する近似アルゴリズムを設計する研究が盛んに行われている [2], [3], [4], [5], [6]．実際，最大 $d$-クリーク問題や最大 $d$-クラブ問題に関しても

1　九州産業大学
Kyushu Sangyo University
2　九州工業大学
Kyushu Institute of Technology
a)　k21rs094@st.kyusan-u.ac.jp
b)　asahiro@is.kyusan-u.ac.jp
c)　miyano@ai.kyutech.ac.jp

近似アルゴリズムを設計する研究が行われている [7], [8].

近似アルゴリズムの近似解がどの程度優れているかを評価するために，**近似度**という概念が用いられる．本稿において，近似アルゴリズム ALG の近似度が $\sigma$ である，あるいは ALG が $\sigma$-近似アルゴリズムであるとは $\mathrm{ALG}(G) \geq \mathrm{OPT}(G)/\sigma$ が成り立つときに言う．$G$ は入力として与えられるグラフ（以下，単に入力グラフと呼ぶ）を表しており，$\mathrm{ALG}(G)$ と $\mathrm{OPT}(G)$ はそれぞれ近似解と最適解の頂点数を表している．近似度の定義より $\sigma$ の値が小さいほど，近似解が最適解に近いと言えるので，近似度の小さいアルゴリズムを設計することが望ましい．しかし，例えば，最大 $d$-クリーク問題に対して，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ を仮定すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，近似度が $O(n^{1/2-\varepsilon})$ であるような多項式時間近似アルゴリズムは設計できない [7]．ここで，$n$ は入力グラフの頂点数を表す．

入力グラフが一般のグラフの場合，最大 $d$-クリーク問題および最大 $d$-クラブ問題に対する多項式時間 $O(n^{1/2})$-近似アルゴリズムが知られている [7]．ここで，入力グラフの構造を制限した場合には，$O(n^{1/2})$ よりも小さな近似度を持つ多項式時間近似アルゴリズムを設計できる可能性がある．スプリットグラフの定義は後述するが，入力グラフをスプリットグラフに制限した場合の最大 2-クラブ問題に対する多項式時間 $O(n^{1/3})$-近似アルゴリズムが知られている [8].

### 1.2 本稿の目的と成果

文献 [8] では，スプリットグラフの最大 2-クリーク問題に対しては，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ を仮定すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，多項式時間 $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは設計できないことが示されている．一方で，スプリットグラフの最大 2-クリーク問題に対して知られている最良の多項式時間近似アルゴリズムは，一般のグラフに対するそれであり，その近似度は $O(n^{1/2})$ である．そこで，スプリットグラフの最大 2-クリーク問題に対して，$O(n^{1/2})$ よりも良い近似度を持つ多項式時間近似アルゴリズムを設計することが本稿の目的である．

本稿では，入力グラフをスプリットグラフに制限した場合に，最大 2-クリーク問題に対する多項式時間 $O(n^{1/3})$-近似アルゴリズムが設計できることを示す．

### 1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである．まず，第 2 節では，最大 $d$-クリーク問題と最大 $d$-クラブ問題の定義を述べる．次に，第 3 節では，スプリットグラフの最大 2-クリーク問題に対する多項式時間 $O(n^{1/3})$-近似可能性について述べる．第 4 節では，まとめと今後の課題について述べる．

## 2. 準備

### 2.1 グラフ理論の用語

文献 [9], [10] を参考に，本稿で用いるグラフ理論の用語をまとめる．$G = (V, E)$ を単純無向連結グラフとする．ここで，$V$ は頂点集合を，$E$ は辺集合を表す．グラフ $G$ の頂点集合および辺集合であることを明示する場合はそれぞれ $V(G), E(G)$ と表記する．グラフ $G = (V, E)$ の 2 頂点 $u, v \in V(G)$ に対して，辺 $e = \{u, v\}$ が存在するとき，頂点 $u$ と頂点 $v$ は隣接していると言う．また，頂点 $u$ と辺 $e$ および頂点 $v$ と辺 $e$ は接続していると言う．頂点 $v$ の次数とは，頂点 $v$ に接続している辺の本数のことを言い，$\deg(v)$ で表す．グラフ $G = (V, E)$ の最大次数とは，$\max_{v \in V}\{\deg(v)\}$ のことを言い，$\Delta(G)$ で表す．頂点 $v$ に隣接している頂点の集合を $N(v)$ で表す．また，頂点集合 $\{v\} \cup N(v)$ を $N[v]$ で表す．グラフ $G = (V, E)$ の点誘導部分グラフ $G' = (V', E')$ とは，$V' \subseteq V$ かつ $E' = \{\{u, v\} \mid u, v \in V', \{u, v\} \in E\}$ を満たすグラフのことを言い，$G[V']$ で表す．

グラフ $G = (V, E)$ の頂点 $u$ から頂点 $u'$ への長さ $k$ の道 $P$ とは，頂点列 $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ で，$u = v_0$, $u' = v_k$, および $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して，$\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ が成り立つものを言う．グラフ $G$ の 2 頂点 $u, v$ の距離 $dist_G(u, v)$ は，グラフ $G$ における頂点 $u$ から頂点 $v$ への道の長さの最小値である．頂点 $u$ から頂点 $v$ への道が存在しない場合は $dist_G(u, v) = \infty$ とする．グラフ $G = (V, E)$ の直径とは $\max_{u,v \in V}\{dist_G(u, v)\}$ であり，$diam(G)$ で表す．

グラフ $G = (V, E)$ において，頂点集合の部分集合 $V' \subseteq V$ 中の任意の異なる 2 頂点間に辺が存在しない場合，$G[V']$ または $V'$ を独立集合と言う．また，頂点集合の部分集合 $V' \subseteq V$ 中の任意の異なる 2 頂点間に辺が存在する場合，$V'$ は完全グラフを構成する，あるいは，$G[V']$ は完全グラフであると言う．

**定義 1** グラフ $G$ が**スプリットグラフ**であるとは，頂点集合 $V(G)$ を $C \cup I = V(G)$ かつ $C \cap I = \varnothing$ を満たすように，グラフ $G[C]$ が完全グラフとなる頂点集合 $C$ と独立集合 $I$ に分けられるものを言い，$G = (C \cup I, E)$ で表す．

図 **1** にスプリットグラフの例を示す．グラフ $G$ の頂点集合 $V(G)$ を，完全グラフを構成する頂点集合 $C = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ と独立集合 $I = \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ に分けることができるので，グラフ $G$ はスプリットグラフである．

### 2.2 最大 $d$-クリーク問題と最大 $d$-クラブ問題

最大 $d$-クリーク問題と最大 $d$-クラブ問題を定義する．

**定義 2** 最大 $d$-**クリーク問題**とは，入力グラフ内から頂点数が最大の $d$-クリークを発見する問題である．ここで，

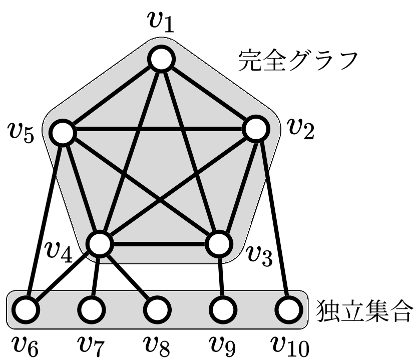



**図 1** スプリットグラフ $G$．$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ が完全グラフを構成しており，$\{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ は独立集合である．

**Fig. 1** A split graph $G$, in which $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ forms a clique and $\{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ is an independent set.

**$d$-クリーク**とは，入力グラフ $G = (V, E)$ に対して，頂点集合の部分集合 $V' \subseteq V$ について，任意の異なる 2 頂点 $u, v \in V'$ を選んだとき，$dist_G(u, v) \leq d$ を満たすような部分グラフ $G[V']$ のことである．

**定義 3** **最大 $d$-クラブ問題**とは，入力グラフ内から頂点数が最大の $d$-クラブを発見する問題である．ここで，**$d$-クラブ**とは，入力グラフ $G = (V, E)$ に対して，頂点集合の部分集合 $V' \subseteq V$ を頂点に持ち，直径が $d$ 以下であるような部分グラフ $G[V']$ のことである．

$d = 1$ のとき，最大 $d$-クリーク問題と最大 $d$-クラブ問題は最大クリーク問題と同一の問題である．$d \geq 2$ のときは，最大 $d$-クリーク問題と最大 $d$-クラブ問題は異なる問題であることを例を挙げて説明する．

図 2（a）のグラフ $G$ に対して，$d = 3$ の場合を考える．すなわち，グラフ $G$ に対する最大 3-クリークと最大 3-クラブを考える．最初に，最大 3-クリークについて考える．グラフ $G$ 全体を選ぶと，$dist_G(v_1, u) = 4 > 3$ であるので，グラフ $G$ は 3-クリークではない．グラフ $G$ から頂点 $v_1$ を取り除いたグラフ $G_1 = G[V(G) - \{v_1\}]$（図 2（b）の黒い頂点により誘導される部分グラフ）を考える．グラフ $G_1$ の任意の異なる 2 頂点 $x, y \in V(G_1)$ に対して，$dist_G(x, y) \leq 3$ が成り立つので，グラフ $G_1$ は 7 頂点の 3-クリークである．8 頂点以上の 3-クリークは存在しないので，グラフ $G_1$ はグラフ $G$ 中の最大 3-クリークである．

次に，最大 3-クラブについて考える．グラフ $G$ の直径は $diam(G) = dist_G(v_1, u) = 4 > 3$ であるので，グラフ $G$ は 3-クラブではない．また，グラフ $G_1$ も，$diam(G_1) = dist_{G_1}(v_2, v_3) = 4 > 3$ であるので，3-クラブではない．次に，グラフ $H = G[V(G) - \{v_1, v_2\}]$（図 2（c）の黒い頂点により誘導される部分グラフ）について考える．$diam(H) = dist_H(v_3, v_4) = 3$ であるので，グラフ $H$ は 3-クラブである．このグラフ $H$ がグラフ $G$ 中の最大 3-クラブであることを示す．先ほど述べたように，グラフ $G$ から頂点 $v_1$ を取り除いたグラフ $G_1$ は 3-クラブではない．グラフ $G$ から頂点 $v_2$ を取り除いたグラフ $G_2 = G[V(G) - \{v_2\}]$ を考えると，このグラフの直径は $diam(G_2) = dist_{G_2}(v_1, v_4) = 4 > 3$ であるので，グラフ $G_2$ も 3-クラブではない．同様に，グラフ $G$ から 1 頂点を取り除いた部分グラフの直径は 4 以上であることが分かる．以上のことから 7 頂点以上の 3-クラブは存在しないので，6 頂点を持つグラフ $H$ が，グラフ $G$ 中の最大 3-クラブである．

上記で見たように，最大 3-クリーク問題と最大 3-クラブ問題の最適解の頂点数は等しいとは限らない．同様に，$d \geq 2$ のときは，最大 $d$-クリーク問題と最大 $d$-クラブ問題が異なる解を持つ入力例を構成できるので，最大 $d$-クリーク問題と最大 $d$-クラブ問題は異なる問題である．

なお，スプリットグラフの直径は 3 以下である．したがって，最大 3-クリーク問題と最大 3-クラブ問題のどちらに対しても，入力グラフそのものを多項式時間で出力すれば，最適解を出力したことになる．また，先に述べたように，最大 1-クリーク問題と最大 1-クラブ問題は最大クリーク問題と同一の問題である．スプリットグラフの最大クリーク問題は，多項式時間で最適解を得られることが知られている [8]．したがって，スプリットグラフに対しては，最大 2-クリーク問題と最大 2-クラブ問題のみ検討すれば十分である．これらの問題について以下の結果が知られている．ここで，$n$ は入力グラフの頂点数を表す．

**定理 4 ([8])** $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ を仮定すると，任意の $\varepsilon > 0$ について，スプリットグラフの最大 2-クリーク問題に対する多項式時間 $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．

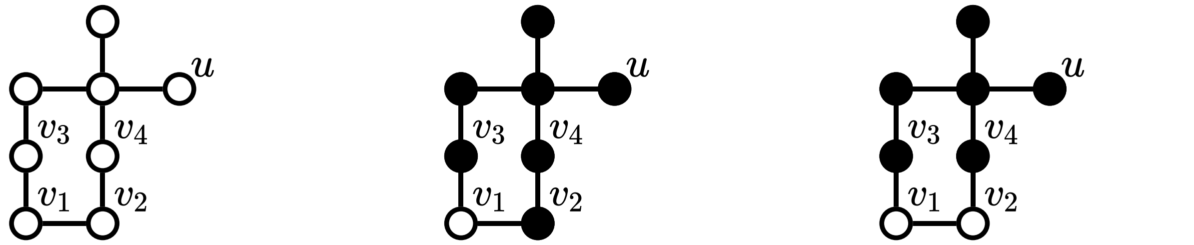
**定理 5 ([8])** スプリットグラフの最大 2-クラブ問題に対する多項式時間 $O(n^{1/3})$-近似アルゴリズムが存在する．

上記の定理で述べられている多項式時間 $O(n^{1/3})$-近似アルゴリズム FindStar を**図 3** に示す．

なお，このアルゴリズムは，スプリットグラフ専用のものではなく，一般のグラフ内から 2-クラブを発見するアルゴリズムである．しかしながら，2-クリークに関しても，以下の結果が知られている．

**定理 6 ([8])** アルゴリズム FindStar は，入力が一般のグラフの場合の最大 2-クリーク問題に対する多項式時間 $O(n^{1/2})$-近似アルゴリズムである．

つまり，アルゴリズム FindStar をスプリットグラフの最大 2-クリーク問題に対する多項式時間 $O(n^{1/2})$-近似アルゴリズムとして利用できる．しかし，スプリットグラフの最大 2-クリーク問題については，既知の近似可能性（$O(n^{1/2})$-近似できる）と近似不可能性（$O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似できない）の間に隔たりが存在する．




(a) グラフ $G$.

(b) グラフ $G$ 中の最大 3-クリーク $G_1 = G[V(G) - \{v_1\}]$.

(c) グラフ $G$ 中の最大 3-クラブ $H = G[V(G) - \{v_1, v_2\}]$.

**図 2** 最大 3-クリーク問題と最大 3-クラブ問題の例.

**Fig. 2** Examples of the maximum 3-clique problem and the maximum 3-club problem.

アルゴリズム FindStar
入力：グラフ $G = (V, E)$.
出力：グラフ $G$ 中の 2-クラブ $G'$.
**ステップ 1.** 頂点 $v \in V$ であって，$\deg(v) = \Delta(G)$ を満たすものを 1 つ選ぶ.
**ステップ 2.** グラフ $G' = G[N[v]]$ を出力する.

**図 3** アルゴリズム FindStar [8].

**Fig. 3** Algorithm FindStar [8].

## 3. スプリットグラフの最大 2-クリーク問題に対する $O(n^{1/3})$ 近似可能性

本節では，スプリットグラフの最大 2-クラブ問題と最大 2-クリーク問題の最適解の頂点数が等しいことを示す．これにより，スプリットグラフの最大 2-クリーク問題に対する $O(n^{1/3})$-近似アルゴリズムを設計できることを示せる．

**定理 7** スプリットグラフ $G = (C \cup I, E)$ 中の最大 2-クリーク $G' = (C' \cup I', E')$ は，$C = C'$ を満たす.

**証明** 背理法を用いて証明するために $C' \subset C$ であると仮定する．なお，$\subset$ は，$\subsetneq$，つまり $C' \subset C$ は $C'$ が $C$ の真部分集合であることを表す.

$|I'| = 0$ の場合，グラフ $G[C]$ は完全グラフ（クリーク）であり，すなわち 2-クリークでもあるので，グラフ $G'$ が最大 2-クリークであるという仮定に矛盾する．ゆえに，$|I'| = 0$ のときは $C = C'$ である.

$|I'| \geq 1$ の場合について考える．$C' \subset C$ であるので，頂点 $s \in C - C'$ について考える．グラフ $G[C]$ は完全グラフなので，任意の頂点 $c \in C - \{s\}$ について $dist_G(s, c) = 1$ である．よって，$C' \subset C$ であるので，任意の頂点 $c' \in C'$ についても，$dist_G(s, c') = 1$ となる．次に頂点 $s$ と $I'$ 中の頂点の距離について考える．任意の頂点 $i' \in I'$ について $s \in N(i')$ のときは $dist_G(s, i') = 1$ である．$s \notin N(i')$ のとき，任意の頂点 $t \in N(i')$ を選ぶと，$dist_G(t, i') = 1$ が成り立つ．$i' \in I$ なので，$t \in C$ である．$dist_G(t, i') = 1$ が成立し，$dist_G(s, i') = dist_G(s, t) + dist_G(t, i') = 1 + 1 = 2$ である．したがって，任意の頂点 $v \in C' \cup I'$ に対して，$dist_G(s, v) \leq 2$ である．よって，グラフ $H = G[C' \cup I' \cup \{s\}]$ は 2-クリークである．$|V(G')| < |V(H)|$ であるので，グラフ $G'$ が最大 2-クリークであるという仮定に矛盾する．ゆえに，$|I'| \geq 1$ のときは $C = C'$ である.

以上のことから，$C = C'$ であることが示された．□

**定理 8** スプリットグラフ $G$ 中の最大 2-クリークは，2-クラブでもある.

**証明** 定理 7 より，スプリットグラフ $G = (C \cup I, E)$ 中の最大 2-クリークを $G' = (C \cup I', E')$ で表すことにする.

$|I'| = 0$ の場合，グラフ $G'$ は完全グラフなので，グラフ $G'$ は 2-クラブでもある.

$|I'| = 1$ の場合について考える．$I' = \{i'\}$ とする．グラフ $G'[C]$ は完全グラフなので，任意の異なる 2 頂点 $s, t \in C$ について $dist_{G'}(s, t) = 1$ である．次に，頂点 $i'$ と $C$ 中の頂点に対して，グラフ $G'$ における距離を考える．$G'$ は連結なスプリットグラフなので，頂点 $u \in N(i') \cap C$ が存在し，$dist_{G'}(i', u) = 1$ である．任意の頂点 $c \in C - \{u\}$ について $dist_{G'}(u, c) = 1$ であるので，$dist_{G'}(i', c) = dist_{G'}(i', u) + dist_{G'}(u, c) = 1 + 1 = 2$ となる．したがって，任意の異なる 2 頂点 $s, t \in C \cup I'$ について $dist_{G'}(s, t) \leq 2$ であるので，グラフ $G'$ は 2-クラブでもある.

$|I'| \geq 2$ の場合について考える．$|I'| = 0$ と $|I'| = 1$ のときの議論と同様に，グラフ $G'$ において，$C$ 中の頂点間の距離は 1 であり，$I'$ 中の頂点と $C$ 中の頂点間の距離は高々 2 である．あとは，グラフ $G'$ における $I'$ 中の頂点間の距離について考えればよい．$I'$ 中の任意の異なる 2 頂点 $i', j'$ について考える．$i', j' \in I$ であるので，$dist_G(i', j') = 1$ ではない．しかし，グラフ $G'$ は 2-クリークなので $dist_G(i', j') = 2$ であるはずである．そのためには $C$ 中のある頂点 $t$ と，辺 $\{t, i'\}$ と 辺 $\{t, j'\}$ が存在しなければならない．$t \in C$ なので，$dist_{G'}(i', j') = 2$ でもある．ゆえに，グラフ $G'$ は 2-クラブでもある.

以上より，スプリットグラフ $G$ 中の最大 2-クリークは，2-クラブでもあることが示された．□

**定理 9** スプリットグラフ $G$ 中の最大 2-クラブは，最

大 2-クリークでもある．

**証明** スプリットグラフ $G$ 中の最大 2-クラブを $H$, 最大 2-クリークを $H'$ とする．定理 8 より，最大 2-クリーク $H'$ は 2-クラブでもあるので，$|H'| \leq |H|$ が成り立つ．また定義より，2-クラブは 2-クリークでもあるので，最大 2-クラブ $H$ は 2-クリークでもある．ゆえに，$|H'| \geq |H|$ が成り立つ．以上より，$|H| = |H'|$ が成り立つので，スプリットグラフ $G$ 中の最大 2-クラブ $H$ の頂点数は，最大 2-クリーク $H'$ の頂点数と等しい．すなわち，最大 2-クラブは最大 2-クリークでもある． □

定理 9 と定理 5 により，アルゴリズム FindStar を，スプリットグラフの最大 2-クリーク問題に対する多項式時間近似アルゴリズムとして利用できるので，次の定理が得られる．

**定理 10** スプリットグラフの最大 2-クリーク問題に対する多項式時間 $O(n^{1/3})$-近似アルゴリズムが存在する．

## 4. まとめと今後の課題

本稿では，スプリットグラフの最大 2-クリーク問題に対して，多項式時間 $O(n^{1/3})$-近似アルゴリズムを設計できることを示した．また，本稿の主題ではないが，最大 2-クラブ問題に対して，定理 9 と定理 4 から次の定理も得られる．

**定理 11** $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ を仮定すると，任意の $\varepsilon > 0$ について，スプリットグラフの最大 2-クラブ問題に対する多項式時間 $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．

今後の課題としては，二部グラフの最大 $d$-クリーク問題や最大 $d$-クラブ問題に対して $O(n^{1/2})$ よりも良い近似度を持つ多項式時間（近似）アルゴリズムを設計することが挙げられる．

**謝辞** 本研究は JSPS 科研費 JP22K11915 と JP24K02902 の助成を受けたものである．

### 参考文献

[1] コルメン，T.，ライザーソン，C.，リベスト，R.，シュタイン，C.（著），浅野 哲夫，岩野 和生，梅雄 博司，山下 将史，和田 幸一（訳）: アルゴリズムイントロダクション 第 3 版 総合版，pp. 902–905，近代科学社，2013 年 12 月．

[2] 藤戸敏弘 : 最小コスト木状被覆問題の 2 倍近似アルゴリズム，情報処理学会研究報告，Vol. 2006-AL-107，No. 71，pp. 13–20，2006．

[3] 福永拓郎 : ハイパーグラフ上の相関クラスタリングに対する近似アルゴリズム，情報処理学会研究報告，Vol. 2017-AL-163，No. 7，pp. 1–8，2017．

[4] 内田純平，穴田一 : クラスタリングによる巡回セールスマン問題の近似解法，情報処理学会研究報告，Vol. 2020-MPS-131，No. 20，pp. 1–2，2020．

[5] 小野廣隆，山中寿登 : 単位円グラフの L(2,1)-ラベリングのための 8 近似アルゴリズム，情報処理学会研究報告，Vol. 2020-AL-176，No. 7，pp. 1–6，2020．

[6] Saito，Y.，Shioura，A. : Polynomial-Time Approximation Schemes for a Class of Integrated Network Design and Scheduling Problems with Parallel Identical Machines，情報処理学会研究報告，Vol. 2022-AL-188，No. 9，pp. 1–6，2022．

[7] 朝廣雄一，土井悠也，志水宏宇，宮野英次 : 距離限定部分グラフ探索問題に対する近似アルゴリズム，情報処理学会研究報告，Vol. 2016-AL-158，No. 18，pp. 1–6，2016．

[8] 三溝和明，朝廣雄一，宮野英次 : 直径 d 部分グラフ最大化問題の近似について，情報処理学会研究報告，Vol. 2010-AL-129，No. 4，pp. 1–8，2010．

[9] 牛島和夫（編著），相利民，朝廣雄一（著）: 離散数学，コロナ社，2006 年 9 月．

[10] Brandstädt，A.，Le，V.B.，Spinrad，J.P. : Graph Classes – A Survey，SIAM，1999．